МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко
16.04.2024

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.36 Метод Фурье

1. Код и наименование специальности: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль специализации: Теория функций и приложения

3. Квалификация: Математик. Механик. Преподаватель

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей

6. Составители программы: Ткачева Светлана Анатоьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол № 0500-03 от 28.03.24

8. Учебный год: 2026/2027 Семестр(ы): 6

9.Цели и задачи учебной дисциплины

Цели освоения учебной дисциплины:

- изучение основ метода решения задач для уравнений с частными производными с помощью их разложений в ряды по собственным функциям.

Задачи учебной дисциплины:

- освоение методов решения задач для уравнений с частными производными различных типов с помощью их разложения в ряды Фурье.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Метод Фурье» относится к Блоку 1 Обязательной части.

Для ее успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Комплексный анализ». Дисциплина непосредственно связана с курсом «Уравнения с частными производными».

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией функций комплексной переменной, обладать полными знаниями курса обыкновенных дифференциальных уравнений, знаниями теории интегралов Лебега, теории банаховых и гильбертовых пространств. Знание метода разделения переменных при решении начально-краевых задач для уравнений с частными производными является базовым при изучении математических моделей различных физических, химических, биологических, социальных процессов.

Дисциплина является предшествующей для курсов «Численные методы», «Основы и математические модели механики сплошной среды», «Математические модели гидродинамики».

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики:	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать: - актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики. Уметь: - использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности. Владеть: - навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.	
		ОПК-1.3.	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 2 / 72 .

Форма промежуточной аттестации зачет– 6 семестр

13. Виды учебной работ

Вид учебной работы	Трудоемкость	
		По семестрам

		Всего	6 семестр	
Контактная работа		32	32	
в том числе:	лекции	16	16	
	практические	16	16	
	лабораторные	-	-	
	курсовая работа	-	-	
	контрольные работы	-	-	
Самостоятельная работа		40	40	
Форма промежуточной аттестации (*зачет – 0 час./экзамен – _____ час.)*		-	-	
Итого:		**72**	**72**	

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
		1. Лекции	
1.1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Собственные значения и собственные функции.	Электронный университет, страница курса: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2532
		Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Построение частных решений и решения начально-краевой задачи.	
1.2	Ортонормированные системы функций	Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве H. Свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.	
		Лемма (о полноте) для ортонормированной системы функций	
1.3	Обоснование метода Фурье	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны.	
1.4	Общая схема метода Фурье	Постановка задачи. Разделение переменных. Лемма о линейно независимых собственных функциях.	
		Лемма об ортогональности собственных функций с весом.	
		Лемма о неотрицательности собственных значений.	
		Построение формального решения.	
1.5	Метод Фурье для уравнения вынужденных колебаний струны	Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах.	
		Вынужденные колебания струны с подвижными концами.	
1.6	Метод Фурье решения краевых задач для уравнения теплопроводности	Решение первой краевой задачи в прямоугольнике для однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями.	
		Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями.	

		Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями.	
1.7	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа	Оператор Лапласа в полярных координатах.	
		Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге на плоскости.	
2. Практические занятия			
2.1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Нахождение собственных значений и собственных функций.	Электронный университет, страница курса: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2532
		Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Построение частных решений и решения начально-краевой задачи.	
2.2	Ортонормированные системы функций	Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве H. Свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.	Электронный университет, страница курса: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2532
		Лемма (о полноте) для ортонормированной системы функций	
2.3	Обоснование метода Фурье	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны.	
2.4	Общая схема метода Фурье	Постановка задачи. Разделение переменных. Лемма о линейно независимых собственных функциях.	
		Лемма об ортогональности собственных функций с весом.	
		Лемма о неотрицательности собственных значений.	
		Построение формального решения.	
2.5	Метод Фурье для уравнения вынужденных колебаний струны	Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах.	
		Вынужденные колебания струны с подвижными концами.	
2.6	Метод Фурье решения краевых задач для уравнения теплопроводности	Решение первой краевой задачи в прямоугольнике для однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями.	
		Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями.	
		Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями.	
2.7	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа	Оператор Лапласа в полярных координатах.	
		Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге на плоскости.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	2	2	-	6	10

2	Ортонормированные системы функций	2	2	-	4	8
3	Обоснование метода Фурье	2	2	-	4	8
4	Общая схема метода Фурье	2	-	-	8	10
5	Метод Фурье для уравнения вынужденных колебаний струны	2	2	-	4	8
6	Метод Фурье решения краевых задач для уравнения теплопроводности	4	4	-	6	14
7	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа	2	4	-	8	14
	Итого:	16	16		40	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся, на которую отводится 40 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Уравнения с частными производными» предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1-7 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение домашних заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Обучающиеся самостоятельно изучают тему «Общая схема метода Фурье», а также раздел «Решение первой краевой задачи в прямоугольнике для однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями» из темы «Метод Фурье решения краевых задач для уравнения теплопроводности». Студентам для организации самостоятельного изучения разделов предложены методические пособия:

1. Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического и параболического типов / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, С.А. Ткачева. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 80 с.
2. Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка эллиптического типа / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, Л.В. Безручкина. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 92 с.

Контроль самостоятельной работы в семестре осуществляется написанием аттестационных заданий по указанным темам.

На лекциях рассказывается теоретический материал, на лабораторных занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Метод Фурье» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекций обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

4. Материалы курса в системе «Электронный университет»(https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2532).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
01	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. . // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
02	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, Т. В. Михайлова, М. И. Шабунин. – М : Физматлит, 2016. – 518 с. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485543
03	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)**:**

№ п/п	Ресурс
1	http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
2	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
3	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания
4	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
5	Электронный курс https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2532.

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, Т. В. Михайлова, М. И. Шабунин. – М : Физматлит, 2016. – 518 с. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485543
3	Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с .
4	Глушко А.В. Практические занятия по классификации дифференциальных уравнений с частными производными / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 38 с .
5	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического и параболического типов / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, С.А. Ткачева. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 80 с.
6	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка эллиптического типа / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, Л.В. Безручкина. –

	Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 92 с.
7	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

В практической части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

В части освоения материала лекционных и лабораторных занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, в частности, электронный курс *(*URL: (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1358) *на* портале «Электронный университет ВГУ».

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть. При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины

---

19. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Домашние задания, индивидуальные задания, тестовые задания, аттестационная работа
2	Ортонормированные системы функций	ОПК-1	ОПК-1.2	КИМ (зачет), аттестационная работа
3	Обоснование метода Фурье	ОПК-1	ОПК-1.2	КИМ (зачет), аттестационная работа
4	Общая схема метода Фурье	ОПК-1	ОПК-1.2	КИМ (зачет), аттестационная работа
5	Метод Фурье для уравнения вынужденных колебаний струны	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	КИМ (зачет), аттестационная работа

6	Метод Фурье решения краевых задач для уравнения теплопроводности	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	КИМ (зачет), аттестационная работа
7	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	КИМ (зачет), аттестационная работа
Промежуточная аттестация Форма контроля - Зачет				КИМ (зачет)

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень практических заданий

Уравнения гиперболического типа

1. Изучить вынужденные поперечные колебания струны, закрепленной на конце $x=0$ и подверженной на конце $x=l$ действию возмущающей гармонической силы, равное $A\sin\omega t$.
2. Изучить продольные колебания однородного цилиндрического стержня, один конец которого заделан, а к другому концу приложена сила $F=A\sin\omega t$, направление которой совпадает с осью стержня.
3. Однородная струна длины l, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, колеблется под действием внешней гармонической силы $F(x,t)=\rho f(x)\sin\omega t$, рассчитанной на единицу длины. Найти отклонение $u(x,t)$ струны при произвольных начальных условиях. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.
4. Решить уравнение
$$u_{tt}+u_t=u_{xx} \quad (0<x<1)$$
$$u(0,t)=t \qquad u(x,0)=0$$
$$u(1,t)=0 \qquad u_t(x,0)=1-x$$
5. Решить уравнение
$$u_{tt}=u_{xx}+u \qquad (0<x<l)$$
$$u(0,t)=0 \qquad u(x,0)=0$$
$$u(l,t)=t \qquad u_t'(x,0)=\frac{x}{l}$$
6. Решить уравнение
$$u_{tt}=a^2u_{xx}+b\operatorname{sh}x$$
при нулевых начальных и краевых условиях
$$u(0,t)=0 \qquad u(x,0)=0$$
$$u(l,t)=0 \qquad u_t(x,0)=0$$
7. Решить уравнение
$$u_{tt}=u_{xx}+bx(x-l)$$
при нулевых начальных и краевых условиях
$$u(0,t)=0 \qquad u(x,0)=0$$
$$u(l,t)=0 \qquad u_t(x,0)=0$$
8. Решить уравнение
$$u_{tt}=u_{xx}+x(x-l)t^2$$

$$u(0,t)=0 \qquad u(x,0)=0$$
$$u(l,t)=0 \qquad u_t(x,0)=0$$

9. Решить уравнение
$$u_{xx}-a^2u_{tt}-2hu_t-b^2u=0$$
при условиях
$$u(0,t)=A \qquad u(x,0)=0$$
$$u(l,t)=0 \qquad u_t(x,0)=0$$

10. Решить следующую смешанную задачу
$$u_{tt}=u_{xx}+x, \quad (0<x<\pi)$$
$$u(0,t)=0 \qquad u(x,0)=\sin 2x$$
$$u(\pi,t)=0 \qquad u_t(x,0)=0$$

11. Решить уравнение
$$u_{tt}+u_t=u_{xx}+1 \qquad (0<x<1)$$
при условиях
$$u(0,t)=0 \qquad u(x,0)=0$$
$$u(1,t)=0 \qquad u_t(x,0)=0$$

12. Решить следующие смешанные задачи
$$u_{tt}-u_{xx}+2u_t=4x+8e^t\cos x \qquad (0<x<\frac{\pi}{2})$$
$$u_x(0,t)=2t \qquad u(x,0)=\cos x$$
$$u(\frac{\pi}{2},t)=\pi t \qquad u_t(x,0)=2x$$

Уравнения параболического типа

1. Дан тонкий однородный стержень $0<x<l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

A. Концы стержня $x=0$ и $x=l$ поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u(x,0)=u_0(x)$

Рассмотреть случаи, когда : а) $u_0(x)=A=const$, б) $u_0(x)=x(l-x)$

B. Конец $x=0$ поддерживается при нулевой температуре, а на конце $x=l$ происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, начальная температура стержня $u(x,0)=u_0(x)$.

C. На обоих концах стержня $(x=0$ и $x=l)$ происходит теплообмен с окружающей средой, а начальная температура стержня $u(x,0)=u_0(x)$.

2. Дан тонкий однородный стержень $0<x<l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

A. Концы стержня $x=0$ и $x=l$ поддерживаются при постоянных температурах $u(0,t)=u_1$, $u(l,t)=u_2$, а начальная температура равна $u(x,0)=u_0(x)=const.$

B. Концы стержня имеют постоянную температуру $u(0,t)=u_1$, $u(l,t)=0$, а начальная температура задается формулой $u(x,0)=x(l-x)$.

C. Левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре $u(l,t)=u_2$, начальная температура стержня $u(x,0)=\frac{x}{l}$.

3. Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его правом конце $x = l$ поддерживается температура, равная нулю, а на левом конце температура равна $u(0,t) = At$, где $A = const$. Начальная температура стержня равна нулю.

Решить следующие смешанные задачи:

4. $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 1)$

$u_x(0,t) = u(1,t) = 0$ $\qquad u(x,0) = x^2 - 1$

5. $u_{xx} = u_t + u$ $\qquad (0 < x < l)$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$ $\qquad u(x,0) = 1$

6. $u_t = u_{xx} - 4u$ $\qquad (0 < x < \pi)$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$ $\qquad u(x,0) = x^2 - \pi x$

7. $u_t = u_{xx}$ $\qquad (0 < x < l)$

$u_x(0,t) = 1$ $\qquad u(x,0) = 0$

$u(l,t) = 0$

В полуполосе $(0 < x < l)$ для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ решить смешанные задачи со следующими условиями:

8. $u(0,t) = u(l,t) = 0$; $u(x,0) = Ax,\ A = const$

9. $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$; $u(x,0) = \varphi(x)$

10. $u_x(0,t) = u(l,t) = 0$; $u(x,0) = A(l - x),\ A = const$

Решить следующие смешанные задачи:

11. $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x$ $\qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

$u_x(0,t) = u(\frac{\pi}{2},t) = 0$ $\qquad u(x,0) = 0$

12. $u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x$ $\qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

$u\left(0,t\right) = 0$ $\qquad u(x,0) = x$

$u_x(\frac{\pi}{2},t) = 1$

Уравнения эллиптического типа

1. Решить уравнение Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = -4$ для круга радиуса a с центром в начале координат при краевом условии $u|_{r=a} = 0$.

2. Найти решение уравнения Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = -Axy$ в круге радиуса R с центром в точке $(0,0)$ при краевом условии $u|_{r=R} = 0$.

3. Решить уравнение Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = -12(x^2 - y^2)$ в кольце $a \le r \le b$, если $u|_{r=a} = 0$, $u_r|_{r=b} = 0$.

4. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = \sin^3 \varphi$.

5. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = \cos^4 \varphi$.

6. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi$.

7. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и такую, что $u_r\big|_{r=R} = A\cos 2\varphi$.

8. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и такую, что $u_r\big|_{r=R} = \sin^3\varphi$.

9. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что $\begin{matrix} u\big|_{r=1} = u_1 = const \\ u\big|_{r=2} = u_2 = const \end{matrix}$.

10. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что $\begin{matrix} u\big|_{r=1} = 1 + \cos^2\varphi \\ u\big|_{r=2} = \sin^2\varphi \end{matrix}$.

11. Найти решение уравнения $u_{xx} + u_{yy} = A$ в кольце $R_1 < r < R_2$, если $u\big|_{r=R_1} = u_1,\ u\big|_{r=R_2} = u_2$ $(A,\ u_1,\ u_2$ – заданные числа).

Примерный перечень задач для аттестационной работы:

Задание 1. Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его правом конце $x = l$ поддерживается температура, равная нулю, а на левом конце температура равна $u(0,t) = At$, где $A = const$. Начальная температура стержня равна нулю.

Задание 2. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l],\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0;l]. \end{cases}$$

Пусть функции $X_k(x)$, где $k = 1,2,...$, являются собственными функциями задачи

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$ сходится и дважды дифференцируем, тогда он всегда будет (варианты ответа):

1) удовлетворять дифференциальному уравнению, начальному и граничным условиям,
2) удовлетворять только дифференциальному уравнению,
3) удовлетворять только граничным условиям,
4) удовлетворять только начальному условию,

Задание 3. В результате решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l],\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0;l] \end{cases}$$

методом Фурье возникает следующая задача Штурма-Лиувилля(варианты ответа):

1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X'(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести написание реферата, контрольные работы и тесты.

Задание для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены *на оценивание:*

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;

2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.

3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Текущая аттестация проводится в форме выполнения контрольных заданий (контрольной работы).

В ходе аттестационной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем из двух заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий можно пользоваться любой литературой, ограничение по времени 90 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 240 минут

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено», которые формируются следующим образом:

выполнение аттестационной работы – по 3 балла за правильно решенную первую задачу и по одному баллу за задания 2,3. При получении не менее 3 баллов выставляется оценка «зачтено».

Описание технологии проведения

Аттестационная работа проводится письменно.

20.2 Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Метод Фурье» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях.

При проведении зачета учитываются результаты аттестационной работы. Для получения оценки «зачтено» в конце 6 семестра у обучающегося должна иметься оценки: «зачтено» по аттестационной работе, и студент должен ответить на один вопрос КИМ (зачет) или студент должен ответить на соответствующие вопросы КИМ (зачет) и дополнительные вопросы по программе курса в ходе проведения зачета.

Весь теоретический материал курса содержится в следующих вопросах:

Перечень вопросов к зачету
Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Разделение переменных. Собственные значения и собственные функции.
Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Построение частных решений и решения начально-краевой задачи.
Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве H. Минимизирующее свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
Лемма (о полноте) для ортонормированной системы в гильбертовом пространстве H.
Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны.
Постановка задачи. Разделение переменных. Лемма о линейно независимых собственных функциях.
Лемма об ортогональности собственных функций с весом $\rho(x)$.
Лемма о неотрицательности собственных значений.

Построение формального решения.
Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах.
Вынужденные колебания струны с подвижными концами.
Решение первой краевой задачи в прямоугольнике для однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями.
Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями.
Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями.
Представление оператора Лапласа в полярных координатах.
Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге на плоскости.

Пример КИМ(зачет)

Контрольно-измерительный материал №_1_

1. В результате решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ x \in [0;l], \ t>0, \\ u(0,t)=0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \ t>0, \\ u(x,0)=\varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \ x \in [0;l] \end{cases}$$

методом Фурье возникает следующая задача Штурма-Лиувилля:

а) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X(l)=0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \ x\in[0;l], \\ X'(0)=0, X(l)=0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X'(l)=0, \end{cases}$ г) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \ x\in[0;l], \\ X'(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$

2. Является ли число $\lambda = 0$ собственным значением задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases}$$

а) да, б) нет.

3. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ x \in [0;l], \ t>0, \\ u(0,t)=0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \ t>0, \\ u(x,0)=\varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \ x \in [0;l]. \end{cases}$$

Пусть функции $X_k(x)$, где $k=1,2,\ldots$, являются собственными функциями задачи

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$ сходится и дважды дифференцируем, тогда он всегда будет

а) удовлетворять только дифференциальному уравнению,
б) удовлетворять только граничным условиям,
в) удовлетворять только начальным условиям,
г) удовлетворять дифференциальному уравнению и граничным условиям,
д) удовлетворять дифференциальному уравнению и начальным условиям,
е) удовлетворять начальным и граничным условиям,
ж) являться решением задачи.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок

Оценка «зачтено» выставляется в любом из трех случаев: 1. Активная работа в ходе семестра, удовлетворительное написание контрольной работы и сдача на положительную оценку одного из заданий КИМ зачетной работы. 2. Верный ответ на не менее двух (из трех) заданий КИМ зачетной работы, удовлетворительное написание контрольной работы при отсутствии штрафных баллов за систематические пропуски. 3. Верный ответ на не менее двух (из трех) заданий КИМ зачетной работы, удовлетворительное написание контрольной работы и ответы на все дополнительные вопросы программы, выясняющие знания студента, пропустившего значительное количество занятий.	Базовый	Зачтено
оценка «незачтено» выставляется студенту, если его знания не удовлетворяет вышеприведенным требованиям на положительные оценки.	-	Не зачтено

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики

Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа)

!Test1

В результате решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l],\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0;l] \end{cases}$$

методом Фурье возникает следующая задача Штурма-Лиувилля(варианты ответа):

1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$

!Test 2

Функции $\cos\left(\dfrac{\pi k x}{l}\right)$, где $k = 0,1,2,...$ являются собственными функциями следующей задачи Штурма-Лиувилля(варианты ответа):

1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X(l)=0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X'(0)=0, X(l)=0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X'(l)=0, \end{cases}$

Решение.
Рассмотрим задачу Штурма-Лувилля

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ x\in(0;l), \\ X'(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$$

Решения этой задачи: $X_k(x)=\cos\left(\dfrac{\pi kx}{l}\right)$,

удовлетворяют уравнению и граничным условиям

$$X_k{}'(0)=0, X_k'(l)=0.$$

$$X_k{}'(0)=-\frac{\pi k\cdot 0}{l}\sin\left(\frac{\pi k\cdot 0}{l}\right)=0,\ X_k{}'(l)=-\frac{\pi kl}{l}\sin\left(\frac{\pi kl}{l}\right)=\pi k\sin\pi k=0, k=0,1,2,\ldots$$

Ответ: 1) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X'(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$

! Test 3

. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad x\in[0;l],\ t>0, \\ u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\ \ t>0, \\ u(x,0)=\varphi_0(x),\ \ x\in[0;l]. \end{cases}$$

Пусть функции $X_k(x)$, где $k=1,2,\ldots$, являются собственными функциями задачи

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$ сходится и дважды дифференцируем, тогда он всегда будет (варианты ответа):

1) удовлетворять дифференциальному уравнению, начальному и граничным условиям,
2) удовлетворять только дифференциальному уравнению,
3) удовлетворять только граничным условиям,
4) удовлетворять только начальному условию,

.

Ответ: 1)

! Test 4

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \ 0 \le x \le \pi, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \ t \ge 0. \end{cases}$$

Являются ли собственными функциями соответствующей задачи Штурма-Лувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \ x \in (0;\pi), \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$$

функции….

Варианты ответа:

1. $\sin\left(\dfrac{3}{2}x\right)$
2. $\sin(2x)$
3. $\cos\left(\dfrac{5}{2}x\right)$
4. $\cos(9x)$

Решение.

Рассмотрим задачу Штурма-Лувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \ x \in (0;\pi), \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$$

Решения этой задачи: $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$, $X(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$,

$X'(x) = \lambda C_2 \cos \lambda x$,

$$X'(l) = \lambda C_2 \cos \lambda \pi = 0 \Rightarrow \lambda \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \Rightarrow \lambda = \frac{2k+1}{2} \Rightarrow$$

$X_k(x) = \sin \dfrac{(2k+1)}{2} x, k = 0,1,2,\ldots$ тогда при $k = 1 \Rightarrow X_1(x) = \sin\left(\dfrac{3}{2}x\right)$

Ответ: 1) $\sin\left(\dfrac{3}{2}x\right)$

! Test 5

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \ 0 \le x \le \pi, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Являются ли собственными функциями соответствующей задачи Штурма-Лувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \ x \in (0;\pi), \\ X'(0) = 0, X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

функции …

Варианты ответа:
1. $\cos(x)$
2. $\cos(5x)$
3. $\sin(3\pi x)$
4. $\sin\left(\dfrac{9}{2}x\right)$

Решение.
Рассмотрим задачу Штурма-Лувилля
$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ x\in(0;\pi), \\ X'(0)=0, X'(\pi)=0. \end{cases}$$
Решения этой задачи: $X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$,
$X'(x)=-\lambda C_1\sin\lambda x+\lambda C_2\cos\lambda x$, $X'(0)=0\Leftrightarrow C_2=0$,
$X'(\pi)=-\lambda C_1\sin\lambda\pi=0\Rightarrow\lambda l=k\pi, k\in Z\Rightarrow\lambda=k\Rightarrow X_k(x)=\cos kx, k=0,1,2,...$ тогда при $k=1\Rightarrow X_1(x)=\cos(x)$.

Ответ. 1), $\cos(x)$

Задания открытого типа (короткий текст):
Вставьте пропущенное слово(числовое значение) или закончите определение

! Test 6

В задаче Коши для уравнения свободных колебаний струны нужно задать
значения функции и ее первой производной по времени в начальный момент времени *t* =…..

Ответ 0.
значения функции и ее первой производной по времени в начальный момент времени $t=0$;

! Test 7
Метод разделения переменных решения задачи свободных колебаний струны ограниченной длины
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x\in[0;l],\ t>0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,\quad t>0, \\ u(x,0)=\varphi_0(x),\ x\in[0;l] \end{cases}$$
называют методом ……….
!Ответ
Фурье

! Test 8
Задача для дифференциального уравнения с частными производными и заданными граничными и начальными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l], \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x}, x \in [0;l] \end{cases}$$

называется ………… задачей для уравнения волновогоураынения

!Ответ
начально-граничной
начально-краевой

! Test 9
Продолжите предложение: задача для дифференциального уравнения с частными производными и заданным начальным условием:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t); \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$$

называется: начальной задачей для уравнения ………………. колебаний струны.
!Ответ
вынужденных
! Test 10
Уравнение и граничные условия $\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in D, \\ u(x) = \varphi(x), x \in \partial D \end{cases}$
определяют ……… краевую задачу для уравнения Лапласа

!Ответ
первую

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).